

## DZIAŁ 10 - DOWODY ALGEBRAICZNE

### Zad. 10.1 (4, czerwiec 2013) [4p.]

Wykaż, że prawdziwa jest równość

$$\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} = 3.$$

**Rozwiązanie:**

$$\begin{aligned} L &= \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}} = \quad \text{Chcemy zwinąć to co jest pod pierwiastkiem we wzór} \\ &\quad \text{skróconego mnożenia na trzecią potęgę. W tym celu rozbijamy wyrażenia pod pierwiastkami tak, żeby pasowały do wzoru} \\ &= \sqrt[3]{\frac{27}{8} + \frac{27\sqrt{5}}{8} + \frac{45}{8} + \frac{5\sqrt{5}}{8}} + \sqrt[3]{\frac{27}{8} - \frac{27\sqrt{5}}{8} + \frac{45}{8} - \frac{5\sqrt{5}}{8}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = 3 = P \end{aligned}$$

### Zad. 10.2 (5, maj 2009) [3p.]

Wykaż, że jeżeli  $A = 3^{4\sqrt{2}+2}$  i  $B = 3^{2\sqrt{2}+3}$ , to  $B = 9\sqrt{A}$ .

**Rozwiązanie:**

$$B = 3^2 \cdot 3^{2\sqrt{2}+1} = 9 \cdot (3^{4\sqrt{2}+2})^{\frac{1}{2}} = 9 \cdot (A)^{\frac{1}{2}} = 9\sqrt{A}$$

### Zad. 10.3 (8, maj 2018) [3p.]

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej  $k$  i dla każdej liczby całkowitej  $m$  liczba

$$k^3m - km^3$$

jest podzielna przez 6.

**Rozwiązanie:**

$$\begin{aligned} k^3m - km^3 &= km \cdot (k^2 - m^2) = \quad \text{Dodajemy i odejmujemy 1, żeby móc rozdzielić to wyrażenie na dwa.} \\ &= km \cdot (k^2 - 1 + 1 - m^2) = km \cdot (k^2 - 1) + km \cdot (1 - m^2) = \quad \text{Oddzielamy } k \text{ od } m, \text{ a następnie korzystamy ze} \\ &\quad \text{wzoru na } a^2 - b^2 \\ &= km \cdot (k^2 - 1) - km \cdot (m^2 - 1) = km \cdot (k - 1)(k + 1) - km \cdot (m - 1)(m + 1) \end{aligned}$$

$k - 1, k, k + 1$  to 3 kolejne liczby całkowite, więc ich iloczyn jest podzielny przez  $3! = 6$ .

Analogicznie iloczyn  $m - 1, m, m + 1$  jest podzielny przez 6.

Różnica dwóch liczb podzielnych przez 6 jest podzielna przez 6.

#### **Zad. 10.4 (1, maj 2011) [4p.]**

Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej  $k$  liczba

$$k^6 - 2k^4 + k^2$$

jest podzielna przez 36.

#### **Rozwiązanie:**

$$k^6 - 2k^4 + k^2 = k^2 \cdot (k^4 - 2k^2 + 1) = k^2 \cdot (k^2 - 1)^2 = k^2 \cdot [(k - 1) \cdot (k + 1)]^2 = [(k - 1) \cdot k \cdot (k + 1)]^2$$

$k - 1, k, k + 1$  to 3 kolejne liczby całkowite, więc ich iloczyn jest podzielny przez  $3! = 6$ . Zatem liczba  $(k - 1) \cdot k \cdot (k + 1)$  jest podzielna przez 6, stąd podniesiona do kwadratu jest podzielna przez 36.

#### **Zad. 10.5 (9, czerwiec 2019) [3p.]**

Udowodnij, że dla każdej liczby nieparzystej  $n$  wyrażenie

$$n^5 - 3n^4 - n + 19$$

jest podzielne przez 16.

#### **Rozwiązanie:**

$$\begin{aligned} n^5 - 3n^4 - n + 19 &= n^5 - 3n^4 - n + 3 + 16 = n^4 \cdot (n - 3) - 1 \cdot (n - 3) + 16 = (n - 3) \cdot (n^4 - 1) + 16 = \\ &= (n - 3) \cdot (n^2 - 1)(n^2 + 1) + 16 = (n - 3)(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1) + 16 \end{aligned}$$

$n$  jest nieparzysta, więc liczby  $n - 3, n - 1, n + 1, n^2 + 1$  są parzyste, więc ich iloczyn jest podzielny przez  $2^4 = 16$ .

Suma dwóch liczb podzielnych przez 16 jest podzielna przez 16.

#### **Zad. 10.6 (8, lipiec 2020) [3p.]**

Wykaż, że dla każdej liczby nieparzystej  $n$  wyrażenie  $n^5 - 3n^4 - n + 3$  jest podzielne przez 16.

#### **Wskazówka (tym razem bez rozwiązania):**

Przypomnij sobie zadanie 10.5

**Zad. 10.7 (5, marzec 2022) [3p.]**

Udowodnij, że suma sześciątów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 jest liczbą podzielną przez 36.

**Rozwiązanie:**

$$k \in \mathbb{Z}$$

$4k + 1, 4k + 2, 4k + 3$  - 3 kolejne liczby całkowite niepodzielne przez 4

$$\begin{aligned}(4k + 1)^3 + (4k + 2)^3 + (4k + 3)^3 &= 64k^3 + 48k^2 + 12k + 1 + 64k^3 + 96k^2 + 48k + 8 + 64k^3 + 144k^2 + 108k + 27 = \\ &= 192k^3 + 288k^2 + 168k + 36 = \end{aligned}$$

*Spróbujemy wyciągnąć 36 przed nawias z jak największej części tego wyrażenia. W tym celu rozbijamy składniki niepodzielne przez 36*

$$= 180k^3 + 288k^2 + 144k + 36 + 12k^3 + 24k = 36(5k^3 + 8k^2 + 4k + 1) + 12k(k^2 + 2)$$

$5k^3 + 8k^2 + 4k + 1$  to liczba całkowita, więc liczba  $36(5k^3 + 8k^2 + 4k + 1)$  jest podzielna przez 36

więc wystarczy pokazać, że liczba

$$k(k^2 + 2)$$

jest podzielna przez 3 dla każdego  $k \in \mathbb{Z}$     *Wtedy liczba  $12k(k^2 + 2)$  jest podzielna przez  $12 \cdot 3 = 36$*

Niech  $m \in \mathbb{Z}$

Jeżeli  $k = 3m$ , to

$$k(k^2 + 2) = 3m(9m^2 + 2)$$

jest podzielna przez 3 jako iloczyn liczby 3 i liczby całkowitej

$$m(9m^2 + 2).$$

Jeżeli  $k = 3m + 1$ , to

$$\begin{aligned}k(k^2 + 2) &= (3m + 1)[(3m + 1)^2 + 2] \\ &= (3m + 1)(9m^2 + 6m + 3) \\ &= 3(3m + 1)(3m^2 + 2m + 1),\end{aligned}$$

jest więc podzielna przez 3 jako iloczyn liczby 3 i liczby całkowitej

$$(3m + 1)(3m^2 + 2m + 1).$$

Jeżeli  $k = 3m + 2$ , to

$$\begin{aligned}k(k^2 + 2) &= (3m + 2)[(3m + 2)^2 + 2] \\ &= (3m + 2)(9m^2 + 12m + 6) \\ &= 3(3m + 2)(3m^2 + 4m + 2),\end{aligned}$$

jest więc podzielna przez 3 jako iloczyn liczby 3 i liczby całkowitej

$$(3m + 2)(3m^2 + 4m + 2).$$

*W ten sposób rozważyliśmy wszystkie całkowite  $k$*

Zatem  $12k(k^2 + 2)$  jest podzielne przez 36.

Suma dwóch liczb podzielnych przez 36 jest podzielna przez 36.

**Zad. 10.8 (6, marzec 2021) [3p.]**

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  większej od 2 i dla każdej liczby rzeczywistej  $y$  prawdziwa jest nierówność

$$5x^2 - 6xy + 3y^2 - 2x - 4 > 0.$$

**Rozwiązanie:**

$5x^2 - 6xy + 3y^2 - 2x - 4 > 0$  Rozbijamy to wyrażenie na więcej składników, żeby pojawił się wzór skróconego mnożenia

$3x^2 - 6xy + 3y^2 + 2x^2 - 2x - 4 > 0$  Teraz możemy zwinąć we wzór i rozłożyć wielomian  $2x^2 - 2x - 4$  na czynniki

$$(\sqrt{3}x - \sqrt{3}y)^2 + 2(x+1)(x-2) > 0$$

Liczba  $(\sqrt{3}x - \sqrt{3}y)^2$  jest kwadratem liczby rzeczywistej, więc jest nieujemna.

Liczba  $2(x+1)(x-2)$  jest dodatnia, ponieważ  $x > 2$ .

Suma liczby dodatniej i liczby nieujemnej jest dodatnia.

**Zad. 10.9 (3, czerwiec 2014) [3p.]**

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  i każdej liczby rzeczywistej  $y$  prawdziwa jest nierówność

$$x(x-1) + y(y-1) \geq xy - 1.$$

**Rozwiązanie:**

$$x(x-1) + y(y-1) \geq xy - 1$$

$$x^2 - x + y^2 - y - xy + 1 \geq 0 \quad | \cdot 2$$

$2x^2 - 2x + 2y^2 - 2y - 2xy + 2 \geq 0$  Rozbijamy  $2x^2$ ,  $2y^2$  i 2 na dwa składniki, żeby dało się zwinąć we wzory skróconego mnożenia

$$x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \geq 0$$

$$(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$$

Kwadraty liczb rzeczywistych podniesionych do kwadratu są nieujemne więc ich suma też jest nieujemna.

**Zad. 10.10 (8, maj 2015) [3p.]**

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  prawdziwa jest nierówność

$$x^4 - x^2 - 2x + 3 > 0.$$

**Rozwiązanie:**

$x^4 - x^2 - 2x + 3 > 0$  Jeśli mamy udowodnić, że jakieś wyrażenie jest  $> 0$  to zazwyczaj

$$x^4 - 2x^2 + 1 + x^2 - 2x + 1 + 1 > 0 \quad \text{musimy szukać jak najwięcej wzorów skróconego mnożenia}$$

$$(x^2 - 1)^2 + (x - 1)^2 + 1 > 0$$

Liczba  $(x^2 - 1)^2$  jest nieujemna.

Liczba  $(x - 1)^2$  jest nieujemna.

Suma dwóch liczb nieujemnych i jednej dodatniej jest dodatnia dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ .

### **Zad. 10.11 (7, maj 2017) [3p.]**

Udowodnij, że dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych  $x, y$  prawdziwa jest nierówność

$$x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0.$$

**Rozwiązanie:**

$$x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$$

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 + x^2y^2 - 4xy + 4 > 0$$

$$(\sqrt{2}x - \sqrt{2}y)^2 + (xy - 2)^2 > 0$$

Z założenia wiemy, że  $x \neq y$ , więc  $(\sqrt{2}x - \sqrt{2}y)^2 > 0$ .

$(xy - 2)^2$  jest liczbą nieujemną.

Suma liczby dodatniej i liczby nieujemnej jest dodatnia.

### **Zad. 10.12 (7, czerwiec 2017) [3p.]**

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  i dla każdej liczby rzeczywistej  $y$  prawdziwa jest nierówność

$$5x^2 + y^2 - 4xy + 6x + 9 \geq 0.$$

**Rozwiązanie:**

$$5x^2 + y^2 - 4xy + 6x + 9 \geq 0$$

$$4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 + 6xy + 9 \geq 0$$

$$(2x - y)^2 + (x + 3)^2 \geq 0$$

Liczby  $(2x - y)^2$  i  $(x + 3)^2$  są nieujemne dla każdych rzeczywistych  $x$  i  $y$ .

Suma liczb nieujemnych jest nieujemna.

**Zad. 10.13 (5, czerwiec 2013) [3p.]**

Uzasadnij, że jeżeli  $2a + b \geq 0$ , to  $2a^3 + b^3 \geq 3a^2b$ .

**Rozwiązanie:****1 sposób:**

$2a^3 + b^3 \geq 3a^2b$  W poleceniu mamy informację o  $2a + b$ , więc musi się to gdzieś pojawić w nierówności do udowodnienia

$2a^3 + b^3 - 3a^2b \geq 0$  Staramy się tak pogrupować wyrazy, żeby nawias  $2a + b$  mógł się pojawić

$2a^3 + a^2b - 4a^2b + b^3 \geq 0$  Tworzymy taką parę, że liczba stojąca przy pierwszym składniku jest dwa razy większa od tej stojącej

$a^2(2a + b) - b(4a^2 - b^2) \geq 0$  przy drugim, tak samo jak w  $2a + b$

$a^2(2a + b) - b(2a - b)(2a + b) \geq 0$  Możemy teraz wyciągnąć  $2a + b$  przed nawias.

$$(2a + b)(a^2 - 2ab + b^2) \geq 0$$

$$(2a + b)(a - b)^2 \geq 0$$

$2a + b \geq 0$  z założenia

$(a - b)^2$  to kwadrat liczby rzeczywistej, więc jest nieujemna

Iloczyn dwóch liczb nieujemnych jest nieujemny.

**2 sposób:**

Wychodzimy od zawsze prawdziwej nierówności dla  $a, b \in R$

$$(a - b)^2 \geq 0$$

$(2a + b)(a - b)^2 \geq 0$  Dalej zawsze prawdziwa nierówność

$$(2a + b)(a^2 - 2ab + b^2) \geq 0$$

$$2a^3 - 4a^2b + 2ab^2 + a^2b - 2ab^2 + b^3 \geq 0$$

$$2a^3 - 3a^2b + b^3 \geq 0$$

$$2a^3 + b^3 \geq 3a^2b$$

Zatem ta nierówność też jest prawdziwa dla każdych rzeczywistych  $a$  i  $b$

**Zad. 10.14 (7, maj 2012) [3p.]**

Udowodnij, że jeżeli  $a + b \geq 0$ , to prawdziwa jest nierówność  $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$ .

**Rozwiązanie:**

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$$

$a^3 + b^3 - a^2b + ab^2 \geq 0$  Korzystamy ze wzoru na  $a^3 + b^3$ , bo ten wzór pozwala zamienić dodawanie na mnożenie

$(a + b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a + b) \geq 0$  i użycie tego wzoru sprawia, że pojawia się wspólny nawias  $a + b$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2 - ab) \geq 0$$

$$(a+b)(a^2-2ab+b^2) \geq 0$$

$$(a+b)(a-b)^2 \geq 0$$

$a+b \geq 0$  z założenia

$(a-b)^2$  jest nieujemna jako kwadrat liczby rzeczywistej

Iloczyn dwóch liczb nieujemnych jest liczbą nieujemną.

### Zad. 10.15 (4, maj 2014) [3p.]

Udowodnij, że dla każdych dwóch liczb rzeczywistych dodatnich  $x, y$  prawdziwa jest nierówność

$$(x+1)\frac{x}{y} + (y+1)\frac{y}{x} > 2$$

**Rozwiązanie:**

$$(x+1) \cdot \frac{x}{y} + (y+1) \cdot \frac{y}{x} > 2 \quad | \cdot xy$$

Możemy pomnożyć obustronnie przez  $xy$ , bo  $x$  i  $y$  są dodatnie więc wiemy, że znak nierówności się nie zmieni

$$(x+1) \cdot x^2 + (y+1) \cdot y^2 > 2xy$$

$$x^3 + x^2 + y^3 + y^2 > 2xy$$

$$x^3 + y^3 + x^2 - 2xy + y^2 > 0$$

$$x^3 + y^3 + (x-y)^2 > 0$$

$x$  i  $y$  są dodatnie więc  $x^3 > 0$  i  $y^3 > 0$

$(x-y)^2$  to liczba rzeczywista podniesiona do kwadratu więc jest nieujemna

Suma dwóch liczb dodatnich i liczby nieujemnej jest dodatnia.

### Zad. 10.16 (13, grudzień 2014) [3p.]

Wykaż, że jeżeli  $a > b \geq 1$ , to

$$\frac{a}{2+a^3} < \frac{b}{2+b^3}$$

**Rozwiązanie:**

$$\frac{a}{2+a^3} < \frac{b}{2+b^3}$$

Możemy pomnożyć obustronnie przez mianowniki, bo są one dodatnie więc wiemy, że znak nierówności się nie zmieni.

$$a(2+b^3) < b(2+a^3)$$

$$2a + ab^3 < 2b + a^3b \quad \text{W poleceniu mamy, że } a > b, \text{ więc pewnie będzie nam potrzebny nawias } (a-b)$$

$$2a - 2b < a^3b - ab^3$$

$$2(a-b) < ab(a^2-b^2)$$

$$2(a-b) < ab(a-b)(a+b) \quad | : (a-b) \text{ Możemy podzielić przez } (a-b), \text{ bo } a > b, \text{ więc } a-b > 0$$

$$ab(a+b) > 2$$

$$a^2b + ab^2 > 2$$

$$a^2b > 1 \quad \text{ i } \quad ab^2 > 1, \quad \text{ bo } a > 1 \text{ i } b \geq 1. \text{ Stąd } a^2b + ab^2 > 2.$$

### Zad. 10.17 (8, czerwiec 2020) [3p.]

Liczby dodatnie  $a$  i  $b$  spełniają równość  $a^2 + 2a = 4b^2 + 4b$ . Wykaż, że  $a = 2b$ .

**Rozwiązanie:**

$$a^2 + 2a = 4b^2 + 4b \quad \text{ Tym razem będziemy musieli stworzyć nawias } (a - 2b)$$

$$2a - 4b + a^2 - 4b^2 = 0$$

$$2(a - 2b) + (a - 2b)(a + 2b) = 0$$

$$(a - 2b)(a + 2b + 2) = 0$$

$$a = 2b \quad \text{ lub } \quad a + 2b = -2$$

Równość  $a + 2b = -2$  jest sprzeczna z warunkami zadania, bo  $a$  i  $b$  są dodatnie, a suma liczb dodatnich nie może być ujemna.

Zatem  $a = 2b$

### Zad. 10.18 (6, czerwiec 2012) [3p.]

Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich  $a, b, c$  i  $d$  prawdziwa jest nierówność

$$ac + bd \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}.$$

**Rozwiązanie:**

$$ac + bd \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \quad \text{ Podnosimy obustronnie do kwadratu}$$

Możemy podnieść obustronnie do kwadratu, bo obie strony tej nierówności są dodatnie *Jakby nie były to byśmy nie mogli!*

$$a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2 \leq (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2)$$

$$a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2 \leq a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$$

$$0 \leq a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2$$

$$(ad - bc)^2 \geq 0$$

Każda liczba rzeczywista podniesiona do kwadratu jest nieujemna, więc ta nierówność jest zawsze prawdziwa.

**Zad. 10.19 (8, czerwiec 2016) [4p.]**

Wykaż, że dla  $a, b, c, d > 0$  prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$$

**Rozwiązanie:**

$$\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$$

$$(a+b)(c+d) \geq ac + 2\sqrt{ac} \cdot \sqrt{bd} + bd$$

$$ac + ad + bc + bd \geq ac + bd + 2\sqrt{ac} \cdot \sqrt{bd}$$

$$ad + bc - 2\sqrt{ad} \cdot \sqrt{bc} \geq 0$$

$$(\sqrt{ad} - \sqrt{bc})^2 \geq 0$$

Każda liczba rzeczywista podniesiona do kwadratu jest nieujemna, więc ta nierówność jest prawdziwa dla wszystkich  $a, b, c, d > 0$

**Zad. 10.20 (6, czerwiec 2018) [3p.]**

Dodatknie liczby rzeczywiste  $a$  i  $b$  takie, że  $a > b$ , spełniają warunek

$$\log_2 \left( \frac{a-b}{3} \right) = \frac{1}{2} (\log_2 a + \log_2 b).$$

Wykaż, że dla liczb  $a$  i  $b$  prawdziwa jest równość  $a^2 + b^2 = 11ab$ .

**Rozwiązanie:**

$$\log_2 \left( \frac{a-b}{3} \right) = \frac{1}{2} (\log_2 a + \log_2 b) \quad \text{Korzystamy ze wzorów z logarytmów}$$

$$\log_2 \left( \frac{a-b}{3} \right) = \log_2(\sqrt{a \cdot b}) \quad \text{Podstawy tych logarytmów są takie same, więc wystarczy porównać liczby logarytmowane}$$

$$\frac{a-b}{3} = \sqrt{ab}$$

$$a-b = 3\sqrt{ab}$$

$$(a-b)^2 = 9ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 9ab$$

$$a^2 + b^2 = 11ab$$

**Zad. 10.21 (8, maj 2019) [3p.]**

Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych  $x$  i  $y$ , takich że  $x < y$ , i dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej  $a$ , prawdziwa jest nierówność

$$\frac{x+a}{y+a} + \frac{y}{x} > 2$$

**Rozwiązanie:**

$$\frac{x+a}{y+a} + \frac{y}{x} > 2$$

Możemy pomnożyć obustronnie przez mianowniki, bo są one dodatnie więc wiemy, że znak nierówności się nie zmienia.

$$(x+a)x + y(y+a) > 2x(y+a)$$

$$x^2 + ax + y^2 + ay > 2xy + 2ax$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + ay - ax > 0$$

$$(x-y)^2 + a(y-x) > 0$$

$$(x-y)^2 > 0 \quad \text{i} \quad a(y-x) > 0, \text{ bo } y > x \text{ i } a > 0$$

Suma dwóch liczb dodatnich jest liczbą dodatnią więc ta nierówność jest prawdziwa.

**Zad. 10.22 (4, maj 2023) [3p.]**

Liczy rzeczywiste  $x$  oraz  $y$  spełniają jednocześnie równanie  $x + y = 4$  i nierówność

$$x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3.$$

Wykaż, że  $x = 2$  oraz  $y = 2$ .

**Rozwiązanie:**

$$x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x \quad \text{Wyliczamy } y \text{ z równania, żeby wstawić go do nierówności.}$$

$$x^3 - x^2 \cdot (4 - x) \leq x(4 - x)^2 - (4 - x)^3$$

$$x^3 - 4x^2 + x^3 \leq x(16 - 8x + x^2) - (64 - 48x + 12x^2 - x^3)$$

$$2x^3 - 4x^2 \leq 16x - 8x^2 + x^3 - 64 + 48x - 12x^2 + x^3$$

$$16x^2 - 64x + 64 \leq 0$$

$$(4x - 8)^2 \leq 0$$

Kwadrat liczby rzeczywistej jest zawsze nieujemny, więc żeby ta nierówność była spełniona to:

$$4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$y = 4 - 2 = 2$$

**Zad. 10.23 (8, maj 2016) [3p.]**

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych  $x$  i  $y$  takich, że  $x^2 + y^2 = 2$ , prawdziwa jest nierówność

$$x + y \leq 2.$$

**Rozwiązanie:**

$x + y \leq 2$    Obie strony nierówności są dodatnie, więc można podnieść obustronnie do kwadratu

$$(x + y)^2 \leq 4$$

$$x^2 + y^2 + 2xy \leq 2 \cdot 2 \quad \text{Korzystamy z podanego w poleceniu równania}$$

$$x^2 + y^2 + 2xy \leq 2 \cdot (x^2 + y^2)$$

$$x^2 + y^2 + 2xy \leq 2x^2 + 2y^2$$

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

$$(x - y)^2 \geq 0$$

Każda liczba rzeczywista podniesiona do kwadratu jest nieujemna, więc ta nierówność jest prawdziwa dla dowolnych  $x, y \in R$

**Zad. 10.24 (5, czerwiec 2024) [3p.]**

Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej  $a$  i każdej liczby dodatniej  $b$  takich, że  $a + b = 1$ , prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}.$$

**Rozwiązanie:**

$$a + b = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 1 - a$$

$\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$  Mnożymy obustronnie przez  $(2a+b) \cdot (a+2b)$ .  $a$  i  $b$  są dodatnie więc ten iloczyn też jest dodatni.

*Stąd, że to wiemy możemy pomnożyć obustronnie tą nierówność, bo wiemy że nie odwracamy znaku.*

$$a + 2b + 2a + b \geq \frac{4}{3} \cdot (2a+b) \cdot (a+2b)$$

$$3a + 3(1-a) \geq \frac{4}{3} \cdot (2a+1-a) \cdot (a+2-2a)$$

$$3 \geq \frac{4}{3} \cdot (a+1) \cdot (2-a) \quad | \cdot 3$$

$$9 \geq 4 \cdot (2a - a^2 + 2 - a)$$

$$9 \geq 4 \cdot (-a^2 + a + 2)$$

$$9 \geq -4a^2 + 4a + 8$$

$$4a^2 - 4a + 1 \geq 0$$

$$(2a-1)^2 \geq 0$$

Ta nierówność jest prawdziwa dla każdego rzeczywistego  $a$

Stąd nierówność  $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$  jest prawdziwa dla wszystkich rzeczywistych, dodatnich  $a$  i  $b$ , takich że  $a + b = 1$

**Zad. 10.25 (5, czerwiec 2016, formuła przed 2015) [3p.]**

Wykaż, że jeśli  $a, b, c$  są dowolnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że  $a + b + c = 0$ , to

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$$

**Rozwiązanie:**

$$a + b + c = 0$$

$$(a + b + c)^2 = 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2ab - 2bc - 2ca$$

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$$

$$P = a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2 =$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca =$$

$$= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2) = L$$

**Zad. 10.26 (2, maj 2011) [4p.]**

Uzasadnij, że jeżeli  $a \neq b$ ,  $a \neq c$ ,  $b \neq c$  i  $a + b = 2c$ , to

$$\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = 2$$

**Rozwiązanie:**

$$\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = 2 \quad \text{Mnożymy obustronnie przez mianowniki}$$

$$ab - ac + ab - bc = 2(a - c)(b - c)$$

$$2ab - ac - bc = 2ab - 2ac - 2bc + 2c^2$$

$$ac + bc = 2c^2$$

$$c(a + b) = 2c^2$$

$$c \cdot 2c = 2c^2$$

$$2c^2 = 2c^2$$

$$L = P$$

**Zad. 10.27 (3, grudzień 2022) [3p.]**

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  oraz dla każdej liczby rzeczywistej  $y$ , spełniających warunek  $x + y \geq 1$ , prawdziwa jest nierówność

$$x^3 + 2xy + y^3 \geq x^2 + xy(x + y) + y^2.$$

**Rozwiązanie:**

*Zajmiemy się tylko tą drugą nierównością i będziemy chcieli, pojawiła się w niej lewa strona nierówności podanej w poleceniu, żebyśmy mogli skorzystać z podanej nierówności.*

$$x^3 + y^3 - xy(x + y) - x^2 + 2xy - y^2 \geq 0 \quad \text{Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na } a^3 + b^3$$

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) - xy(x + y) - (x^2 - 2xy + y^2) \geq 0 \quad \text{Dzięki temu otrzymujemy wspólny czynnik który możemy wyciągnąć przed nawias.}$$

$$(x + y)[(x^2 - xy + y^2) - xy] - (x - y)^2 \geq 0$$

$$(x + y)(x^2 - 2xy + y^2) - (x - y)^2 \geq 0$$

$$(x + y)(x - y)^2 - (x - y)^2 \geq 0$$

$$(x - y)^2(x + y - 1) \geq 0$$

$$(x - y)^2 \geq 0 \text{ jako kwadrat liczby rzeczywistej} \quad x + y - 1 \geq 0 \text{ z założenia}$$

Iloczyn dwóch liczb nieujemnych jest nieujemny.

**Zad. 10.28 (2, maj 2025) [3p.]**

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej  $a$  i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej  $b$  takich, że  $b \neq \frac{1}{2}a$ , prawdziwa jest nierówność

$$(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2.$$

**Rozwiązanie:**

$$(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2 \quad \text{Wzór skróconego mnożenia na } (a + b)^3$$

$$a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3 > 8a^2b + 16ab^2$$

$$a^3 - 2a^2b - 4ab^2 + 8b^3 > 0$$

$$a^2(a - 2b) - 4b^2(a - 2b) > 0$$

$$(a - 2b) \cdot (a^2 - 4b^2) > 0 \quad \text{Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na } (a^2 - b^2)$$

$$(a - 2b) \cdot (a - 2b) \cdot (a + 2b) > 0$$

$$(a - 2b)^2 \cdot (a + 2b) > 0$$

$$(a - 2b)^2 \text{ to liczba dodatnia, bo jest to kwadrat liczby rzeczywistej i z założenia } a \neq 2b$$

$$(a + 2b) \text{ to liczba dodatnia, bo } a \text{ i } b \text{ są dodatnie.}$$

Iloczyn dwóch liczb dodatnich jest dodatni.

**Zad. 10.29 (5, zbiór CKE 2023) [4p.]**

Suma liczb całkowitych  $x$  i  $y$  jest podzielna przez 3.

Wykaż, że suma sześcianów liczb  $x$  i  $y$  jest podzielna przez 9.

**Rozwiązanie:**

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) =$$

*Mamy iloczyn dwóch liczb, z których wiemy że jedna jest podzielna przez 3. Musimy wykazać tylko, że  $x^2 - xy + y^2$  jest podzielne przez 3. W tym celu chcemy żeby w tym nawiasie również pojawiło się  $(x + y)$ . Możemy to zrobić tworząc tam wzór skróconego mnożenia.*

$= (x + y)(x^2 + 2xy + y^2 - 2xy - xy) =$  *Dodajemy a potem odejmujemy  $2xy$ , żeby dało się zwinąć we wzór, ale nie zmieniając wartości wyrażenia*

$$= (x + y)[(x + y)^2 - 3xy]$$

$(x + y)$  jest podzielne przez 3 z założenia. Stąd  $(x + y)^2$  również.

$3xy$  jest podzielne przez 3 jako iloczyn 3 i liczby całkowitej.

Różnica liczb podzielnych przez 3 jest podzielna przez 3. Zatem  $(x + y)^2 - 3xy$  jest podzielne przez 3.

Iloczyn dwóch liczb podzielnych przez 3 jest podzielny przez 9.

**Zad. 10.30 (6, czerwiec 2022) [3p.]**

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  i dla każdej liczby rzeczywistej  $y$  takich, że  $x \neq y$ , spełniona jest nierówność

$$x^4 + y^4 > xy(x^2 + y^2)$$

**Rozwiązanie:**

$$x^4 + y^4 > xy(x^2 + y^2)$$

$$x^4 + y^4 > x^3y + xy^3$$

$$x^4 - x^3y + y^4 - xy^3 > 0$$

$$x^3(x - y) - y^3(x - y) > 0$$

$$(x - y)(x^3 - y^3) > 0$$

$$(x - y)(x - y)(x^2 + xy + y^2) > 0$$

$$(x - y)^2(x^2 + xy + y^2) > 0$$

$(x - y)^2$  to liczba dodatnia, bo kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny, a  $x \neq y$  więc ta liczba nie może być równa 0.

$f(x) = x^2 + xy + y^2$  *Traktujemy to jako funkcję kwadratową, gdzie  $y$  traktujemy jak liczbę, a  $x$  jak niewiadomą*

$$a > 0$$

$$\Delta = y^2 - 4y^2 = -3y^2$$

Jeśli  $y \neq 0$  to  $\Delta < 0$ , więc  $x^2 + xy + y^2 > 0$  dla każdego  $x$

Jeśli  $y = 0$  to  $\Delta = 0$ .  $x \neq y$ , więc  $x^2 + xy + y^2 = x^2 > 0$

Zatem liczba  $x^2 + xy + y^2$  jest dodatnia dla każdych rzeczywistych  $x$  i  $y$  takich, że  $x \neq y$ .

Iloczyn dwóch liczb dodatnich jest liczbą dodatnią.

### Zad. 10.31 (5, czerwiec 2023) [3p.]

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej  $a$  prawdziwa jest nierówność

$$a^2 + \frac{16}{a} \geq 12.$$

**Rozwiązanie:**

$$a^2 + \frac{16}{a} \geq 12 \quad | \cdot a \quad a > 0$$

*Możemy pomnożyć nierówność obustronnie przez  $a$  bo wiemy, że jest większe od 0*

$$a^3 + 16 \geq 12a$$

$$a^3 - 12a + 16 \geq 0$$

$a^3 - 4a - 8a + 16 \geq 0$  *Rozkładamy ten wielomian na czynniki grupując odpowiednio wyrazy. Można to również zrobić schematem Hornera.*

$$a(a^2 - 4) - 8(a - 2) \geq 0$$

$$a(a - 2)(a + 2) - 8(a - 2) \geq 0$$

$$(a - 2) \cdot (a^2 + 2a - 8) \geq 0$$

$$(a - 2) \cdot (a - 2)(a + 4) \geq 0$$

$$(a - 2)^2 \cdot (a + 4) \geq 0$$

$(a - 2)^2$  to liczba nieujemna jako kwadrat liczby rzeczywistej

$(a + 4)$  to liczba dodatnia, bo  $a$  jest dodatnie

Iloczyn liczby nieujemnej i liczby dodatniej jest nieujemny.

### Zad. 10.32 (6, czerwiec 2022) [3p.]

Wykaż, że nierówność

$$\sqrt[4]{\frac{a^4 + b^4}{2}} \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste  $a$  i  $b$ .

**Rozwiązanie:**

**Sposób 1:**

Obliczmy średnią arytmetyczną i kwadratową  $a^2$  i  $b^2$ :

średnia arytmetyczna :  $\frac{a^2+b^2}{2}$

średnia kwadratowa :  $\sqrt{\frac{(a^2)^2+(b^2)^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}$

*Korzystamy z zależności pomiędzy średnimi (można ją znaleźć w tablicach matematycznych)*

$$\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}} \geq \frac{a^2+b^2}{2} \quad \text{Obie strony nierówności są dodatnie}$$

*Pierwiastkujemy obustronnie*

$$\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Otrzymaliśmy nierówność która była do udowodnienia.

### Sposób 2:

$$\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad \text{Obie strony nierówności są dodatnie}$$

*Podnosimy obustronnie do czwartej potęgi*

$$\frac{a^4+b^4}{2} \geq \frac{a^4+2a^2b^2+b^4}{4}$$

$$\frac{2a^4+2b^4}{4} - \frac{a^4+2a^2b^2+b^4}{4} \geq 0$$

$$\frac{a^4-2a^2b^2+b^4}{4} \geq 0$$

$$\frac{(a^2-b^2)^2}{4} \geq 0$$

$(a^2 - b^2)^2$  jest liczbą nieujemną jako kwadrat liczby rzeczywistej, więc ta nierówność jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste  $a$  i  $b$