

DZIAŁ 10 - DOWODY ALGEBRAICZNE

Zad. 10.1 (4, czerwiec 2013) [4p.]

Wykaż, że prawdziwa jest równość

$$\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} = 3.$$

Zad. 10.2 (5, maj 2009) [3p.]

Wykaż, że jeżeli $A = 3^{4\sqrt{2}+2}$ i $B = 3^{2\sqrt{2}+3}$, to $B = 9\sqrt{A}$.

Zad. 10.3 (8, maj 2018) [3p.]

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej k i dla każdej liczby całkowitej m liczba

$$k^3m - km^3$$

jest podzielna przez 6.

Zad. 10.4 (1, maj 2011) [4p.]

Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba

$$k^6 - 2k^4 + k^2$$

jest podzielna przez 36.

Zad. 10.5 (9, czerwiec 2019) [3p.]

Udowodnij, że dla każdej liczby nieparzystej n wyrażenie

$$n^5 - 3n^4 - n + 19$$

jest podzielne przez 16.

Zad. 10.6 (8, lipiec 2020) [3p.]

Wykaż, że dla każdej liczby nieparzystej n wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 3$ jest podzielne przez 16.

Zad. 10.7 (5, marzec 2022) [3p.]

Udowodnij, że suma sześciątów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 jest liczbą podzielną przez 36.

Zad. 10.8 (6, marzec 2021) [3p.]

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x większej od 2 i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność

$$5x^2 - 6xy + 3y^2 - 2x - 4 > 0.$$

Zad. 10.9 (3, czerwiec 2014) [3p.]

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność

$$x(x - 1) + y(y - 1) \geq xy - 1.$$

Zad. 10.10 (8, maj 2015) [3p.]

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność

$$x^4 - x^2 - 2x + 3 > 0.$$

Zad. 10.11 (7, maj 2017) [3p.]

Udowodnij, że dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność

$$x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0.$$

Zad. 10.12 (7, czerwiec 2017) [3p.]

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność

$$5x^2 + y^2 - 4xy + 6x + 9 \geq 0.$$

Zad. 10.13 (5, czerwiec 2013) [3p.]

Uzasadnij, że jeżeli $2a + b \geq 0$, to $2a^3 + b^3 \geq 3a^2b$.

Zad. 10.14 (7, maj 2012) [3p.]

Udowodnij, że jeżeli $a + b \geq 0$, to prawdziwa jest nierówność $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$.

Zad. 10.15 (4, maj 2014) [3p.]

Udowodnij, że dla każdych dwóch liczb rzeczywistych dodatnich x, y prawdziwa jest nierówność

$$(x+1)\frac{x}{y} + (y+1)\frac{y}{x} > 2$$

Zad. 10.16 (13, grudzień 2014) [3p.]

Wykaż, że jeżeli $a > b \geq 1$, to

$$\frac{a}{2+a^3} < \frac{b}{2+b^3}$$

Zad. 10.17 (8, czerwiec 2020) [3p.]

Liczby dodatnie a i b spełniają równość $a^2 + 2a = 4b^2 + 4b$. Wykaż, że $a = 2b$.

Zad. 10.18 (6, czerwiec 2012) [3p.]

Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c i d prawdziwa jest nierówność

$$ac + bd \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}.$$

Zad. 10.19 (8, czerwiec 2016) [4p.]

Wykaż, że dla $a, b, c, d > 0$ prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$$

Zad. 10.20 (6, czerwiec 2018) [3p.]

Dodatnie liczby rzeczywiste a i b takie, że $a > b$, spełniają warunek

$$\log_2 \left(\frac{a-b}{3} \right) = \frac{1}{2} (\log_2 a + \log_2 b).$$

Wykaż, że dla liczb a i b prawdziwa jest równość $a^2 + b^2 = 11ab$.

Zad. 10.21 (8, maj 2019) [3p.]

Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y , takich że $x < y$, i dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej a , prawdziwa jest nierówność

$$\frac{x+a}{y+a} + \frac{y}{x} > 2$$

Zad. 10.22 (4, maj 2023) [3p.]

Liczby rzeczywiste x oraz y spełniają jednocześnie równanie $x + y = 4$ i nierówność

$$x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3.$$

Wykaż, że $x = 2$ oraz $y = 2$.

Zad. 10.23 (8, maj 2016) [3p.]

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y takich, że $x^2 + y^2 = 2$, prawdziwa jest nierówność

$$x + y \leq 2.$$

Zad. 10.24 (5, czerwiec 2024) [3p.]

Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej a i każdej liczby dodatniej b takich, że $a + b = 1$, prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}.$$

Zad. 10.25 (5, czerwiec 2016, formuła przed 2015) [3p.]

Wykaż, że jeśli a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $a + b + c = 0$, to

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

Zad. 10.26 (2, maj 2011) [4p.]

Uzasadnij, że jeżeli $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$ i $a + b = 2c$, to

$$\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = 2$$

Zad. 10.27 (3, grudzień 2022) [3p.]

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x oraz dla każdej liczby rzeczywistej y , spełniających warunek $x + y \geq 1$, prawdziwa jest nierówność

$$x^3 + 2xy + y^3 \geq x^2 + xy(x + y) + y^2.$$

Zad. 10.28 (2, maj 2025) [3p.]

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej a i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej b takich, że $b \neq \frac{1}{2}a$, prawdziwa jest nierówność

$$(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2.$$

Zad. 10.29 (5, zbiór CKE 2023) [4p.]

Suma liczb całkowitych x i y jest podzielna przez 3.

Wykaż, że suma sześciątów liczb x i y jest podzielna przez 9.

Zad. 10.30 (6, czerwiec 2022) [3p.]

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y takich, że $x \neq y$, spełniona jest nierówność

$$x^4 + y^4 > xy(x^2 + y^2)$$

Zad. 10.31 (5, czerwiec 2023) [3p.]

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej a prawdziwa jest nierówność

$$a^2 + \frac{16}{a} \geq 12.$$

Zad. 10.32 (6, czerwiec 2022) [3p.]

Wykaż, że nierówność

$$\sqrt[4]{\frac{a^4 + b^4}{2}} \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste a i b .

Zad. 10.33 [3p.]

Dodatnie liczby rzeczywiste x oraz y spełniają jednocześnie równanie

$$x + y = 6$$

oraz nierówność

$$\sqrt{8x^3 + 8y^3} \leq \sqrt{8x^2y + 8xy^2}.$$

Wykaż, że

$$x = y = 3.$$