

DZIAŁ 1 - FUNKCJA KWADRATOWA

Zadanie 1.1. (14, marzec 2021) [5p.]

Wyznacz wszystkie wartości parametru a , dla których równanie

$$x^2 - 2ax + a^3 - 2a = 0$$

ma dwa różne rozwiązania dodatnie.

Rozwiązanie:

$$\begin{cases} \Delta > 0 & \text{Mają być dwa różne miejsca zerowe} \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 & \text{Dwa różne miejsca zerowe będą dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn i suma są większe od zera} \end{cases}$$

1. $\Delta > 0$

$$\Delta = (-2a)^2 - 4(a^3 - 2a) = 4a^2 - 4a^3 + 8a$$

$$-4a^3 + 4a^2 + 8a > 0$$

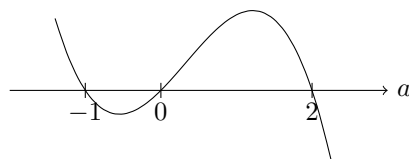
$$-a^3 + a^2 + 2a > 0$$

$$-a(a^2 - a - 2) > 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) = 9 \quad \sqrt{\Delta} = 3 \quad \text{Tu liczymy deltę trójmianu } a^2 - a - 2$$

$$a_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \quad a_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$-a(a+1)(a-2) > 0$$



$$a \in (-\infty, -1) \cup (0, 2)$$

2. $x_1 + x_2 > 0$

$$2a > 0 \quad \text{Korzystamy ze wzoru Viete'a na sumę pierwiastków } x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$a > 0$$

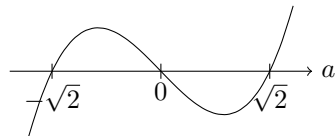
$$a \in (0, \infty)$$

$$3. x_1 \cdot x_2 > 0$$

$a^3 - 2a > 0$ Korzystamy ze wzoru Viete'a na iloczyn pierwiastków $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

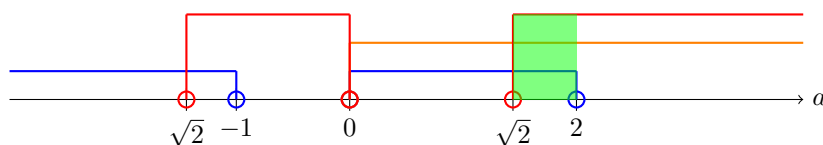
$$a(a^2 - 2) > 0$$

$$a(a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2}) > 0$$



$$a \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, \infty)$$

4. Bierzemy część wspólną wszystkich przedziałów.



$$a \in (\sqrt{2}, 2)$$

Zadanie 1.2 (3, maj 2008) [5p.]

Liczby $x_1 = 5 + \sqrt{23}$ i $x_2 = 5 - \sqrt{23}$ są rozwiązaniami równania $x^2 - (p^2 + q^2)x + (p + q) = 0$ z niewiadomą x . Oblicz wartości p i q .

Rozwiązanie:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = p^2 + q^2 \\ x_1 \cdot x_2 = p + q \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 + \sqrt{23} + 5 - \sqrt{23} = p^2 + q^2 \\ (5 + \sqrt{23})(5 - \sqrt{23}) = p + q \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10 = p^2 + q^2 \\ 2 = p + q \end{cases} \Rightarrow p = 2 - q \quad \text{Wstawiamy to } p \text{ do pierwszego równania.}$$

$$10 = (2 - q)^2 + q^2$$

$$10 = 4 - 4q + q^2 + q^2$$

$$2q^2 - 4q - 6 = 0$$

$$q^2 - 2q - 3 = 0$$

$$q_1 = 3 \quad q_2 = -1$$

$$p_1 = -1 \quad p_2 = 3 \quad \text{Zauważmy, że rozwiązanie z indeksem 2 jest tym samym co rozwiązanie z indeksem 1}$$

Odpowiedź:

$$\begin{cases} p = -1 \\ q = 3 \end{cases}$$

Zadanie 1.3 (4, sierpień 2010) [5p.]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 - (m - 4)x + m^2 - 4m = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, których suma jest mniejsza od $2m^3 - 3$.

Rozwiązanie:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 < 2m^3 - 3 \end{cases}$$

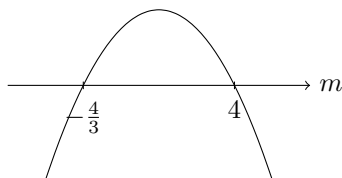
1. $\Delta > 0$

$$\Delta = [-(m - 4)]^2 - 4 \cdot (m^2 - 4m) = m^2 - 8m + 16 - 4m^2 + 16m = -3m^2 + 8m + 16$$

$$-3m^2 + 8m + 16 > 0$$

$$\Delta = 8^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 16 = 256 \quad \sqrt{\Delta} = 16$$

$$m_1 = \frac{-8-16}{-6} = 4 \quad m_2 = \frac{-8+16}{-6} = -\frac{4}{3}$$



$$m \in \left(-\frac{4}{3}, 4\right)$$

2. $x_1 + x_2 < 2m^3 - 3$

$$m - 4 < 2m^3 - 3 \quad \text{Stosujemy wzór Viete'a na sumę pierwiastków, } x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$-2m^3 + m - 1 < 0$ Tutaj nietrudno zauważyć, że jednym z pierwiastków jest -1 . Korzystając z twierdzenia o pierwiastkach wielomianu o wsp. całkowitych i podstawiając te liczby można to łatwo pokazać

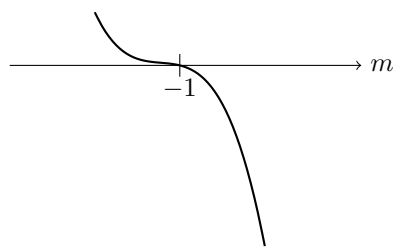
$$\begin{array}{c|cccc} & -2 & 0 & 1 & -1 \\ \hline -1 & -2 & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

Skorzystaliśmy ze schematu Hornera do wyznaczenia współczynników trójmianu kwadratowego w rozkładzie powyższego wielomianu na czynniki

$$(m + 1)(-2m^2 + 2m - 1) < 0$$

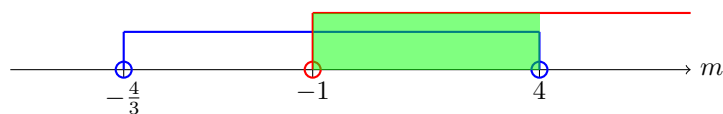
$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-1) = -4 < 0$$

$$-(m + 1)(2m^2 - 2m + 1) < 0$$



$$m \in (-1, \infty)$$

3. Część wspólna.



$$m \in (-1, 4)$$

Zadanie 1.4 (2, czerwiec 2011) [5p.]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $2x^2 - (m-2)x - 3m = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 , spełniające warunek $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \leq 25$.

Rozwiązanie:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \leq 25 \end{cases}$$

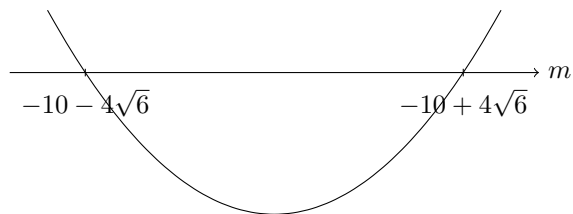
1. $\Delta > 0$

$$\Delta = [-(m-2)]^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3m) = m^2 - 4m + 4 + 24m = m^2 + 20m + 4$$

$$m^2 + 20m + 4 > 0$$

$$\Delta = 20^2 - 4 \cdot 4 = 384 \quad \sqrt{\Delta} = 8\sqrt{6}$$

$$m_1 = \frac{-20-8\sqrt{6}}{2} = -10-4\sqrt{6} \quad m_2 = \frac{-20+8\sqrt{6}}{2} = -10+4\sqrt{6}$$



$$m \in (-\infty, -10 - 4\sqrt{6}) \cup (-10 + 4\sqrt{6}, \infty)$$

$$2. \ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \leq 25$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_2 \leq 25 \quad \text{Zamieniamy } x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq 25 \quad \text{Korzystamy teraz ze wzorów Viete'a}$$

$$\left(\frac{m-2}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{-3m}{2} \leq 25$$

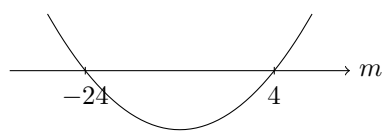
$$\frac{m^2 - 4m + 4}{4} + 6m - 25 \leq 0$$

$$m^2 - 4m + 4 + 24m - 100 \leq 0$$

$$m^2 + 20m - 96 \leq 0$$

$$\Delta = 20^2 - 4 \cdot (-96) = 784 \quad \sqrt{\Delta} = 28$$

$$m_1 = \frac{-20-28}{2} = -24 \quad m_2 = \frac{-20+28}{2} = 4$$



$$m \in \langle -24, 4 \rangle$$

3. Część wspólna.



$$m \in \langle -24, -10 - 4\sqrt{6} \rangle \cup \langle -10 + 4\sqrt{6}, 4 \rangle$$

Zadanie 1.5 (7, maj 2015) [2p.]

Liczby (-1) i 3 są miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f . Oblicz $\frac{f(6)}{f(12)}$.

Rozwiązanie:

Niech $f(x) = a(x+1)(x-3)$, gdzie $a \neq 0$.

$$\frac{f(6)}{f(12)} = \frac{a(6+1)(6-3)}{a(12+1)(12-3)} = \frac{7 \cdot 3}{13 \cdot 9} = \frac{7}{13 \cdot 3} = \frac{7}{39}$$

Zadanie 1.6 (12, czerwiec 2024) [6p.]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie:

$$(3 - m) \cdot x^2 + (m + 1) \cdot x - (m + 1)^2 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek:

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + 7$$

Zapisz obliczenia.

Rozwiązanie:

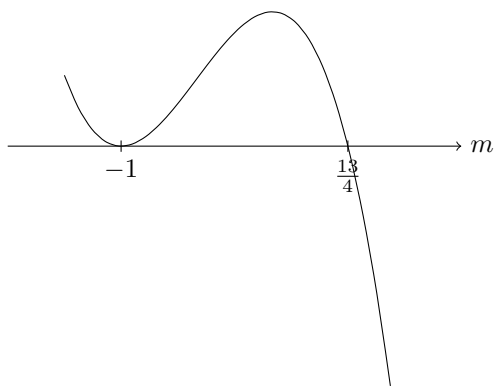
$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + 7 \\ m \neq 3 \end{cases} \quad \text{Chcemy mieć dwa różne rozwiązania, dlatego równanie musi być kwadratowe}$$

1. $\Delta > 0$

$$\Delta = (m + 1)^2 + 4(3 - m)(m + 1)^2 = (m + 1)^2(13 - 4m) = -4(m + 1)^2(m - \frac{13}{4})$$

$$-4(m + 1)^2(m - \frac{13}{4}) > 0$$

$$m_1 = -1 \quad m_2 = \frac{13}{4}$$



$$m \in (-\infty, -1) \cup (-1, \frac{13}{4})$$

2. $x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + 7$

$$(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 - 7 = 0$$

$$(\frac{-(m+1)}{3-m})^2 - 3 \cdot \frac{-(m+1)^2}{3-m} - 7 = 0$$

$$\frac{m^2+2m+1}{(3-m)^2} + \frac{3m^2+6m+3}{3-m} - 7 = 0$$

$$m^2 + 2m + 1 + (3m^2 + 6m + 3)(3 - m) - 7(9 - 6m + m^2) = 0$$

$$m^2 + 2m + 1 + 9m^2 - 3m^3 + 18m - 6m^2 + 9 - 3m - 63 + 42m - 7m^2 = 0$$

$$-3m^3 - 3m^2 + 59m - 53 = 0$$

$$-3m^3 + 3m - 3m^2 + 3m + 53m - 53 = 0$$

$$-3m(m^2 - 1) - 3m(m - 1) + 53(m - 1) = 0$$

$$(m-1)[-3m(m+1)-3m+53]=0$$

$$(m-1)(-3m^2-6m+53)=0$$

$$\Delta = (-6)^2 + 4 \cdot 3 \cdot 53 = 36 + 636 = 672 \quad \sqrt{\Delta} = 4\sqrt{42}$$

$$m = 1 \quad \text{lub} \quad m = \frac{6-4\sqrt{42}}{-6} = -\frac{3-2\sqrt{42}}{3} \quad \text{lub} \quad m = -\frac{3+2\sqrt{42}}{3}$$

3. Bierzemy te rozwiązania z 2. które należą do przedziału z 1.

Korzystając z kalkulatora: $-\frac{3-2\sqrt{42}}{3} \approx 3,32$ oraz $-\frac{3+2\sqrt{42}}{3} \approx -5,32$

$$m = 1 \quad \text{lub} \quad m = -\frac{3-2\sqrt{42}}{3} \quad \text{lub} \quad m = -\frac{3+2\sqrt{42}}{3}$$